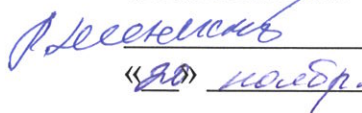


Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю
«Математика»

 В.Н. Деснянский
«10» ноября 2024 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-11 класс
Вариант 1**

Задание №1

Найдите в явном виде целое число, заданное выражением:

$$\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29}$$

Задание №2

Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно с одного места и в одном направлении. Первый впервые обогнал второго через 5 минут, а второй обогнал третьего через 7 минут. Через сколько минут после старта первый впервые обогнал третьего?

Задание №3

Плоская фигура S представлена в виде множества точек (x, y) , удовлетворяющих неравенству:

$$(|x| + |1 - |y|| - 1)^2 \leq 1$$

Нарисуйте эту фигуру и найдите ее площадь.

Задание №4

Решите уравнение:

$$\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 2x + \operatorname{ctg}^3 3x = (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x)^3$$

Задание №5

Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие уравнению:

$$f(x) + (x - 2)f(1) + 3f(0) = x^3 + 2$$

Задание №6

Точка D расположена на стороне MN треугольника LMN так, что $ND:DM=1:2$. При повороте этого треугольника на некоторый угол вокруг точки D вершина L переходит в вершину N, а вершина M в точку A, лежащую на продолжении LM за точку L.

Найдите углы треугольника LMN.

Задание №7

Найдите $\min(2y - x)$ где (x, y) удовлетворяют неравенству
 $2y - 5x \geq 4x^2 + 5$

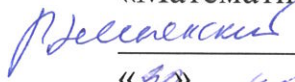
Задание №8

Найдите все целочисленные решения системы неравенств:

$$\begin{cases} x^3 - 3y^2 - 4x + 18y - 26 > 0 \\ x^3 + y^2 - 4x - 8y + 14 < 0 \end{cases}$$

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю
«Математика»

 В.Н. Деснянский
«10» ноября 2024 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-11 класс
Вариант 2**

Задание №1

Найдите в явном виде целое число, заданное выражением:

$$\sqrt{9 + \sqrt{45}} - \sqrt{1,5} - \sqrt{7,5} + 1$$

Задание №2

Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно с одного места и в одном направлении. Первый впервые обогнал второго через три минуты, а еще через две минуты в третий раз обогнал третьего.

Через сколько минут после старта второй впервые обогнал третьего?

Задание №3

Плоская фигура S представлена в виде множества точек (x, y) , удовлетворяющих неравенству:

$$(|y| + |1 - |x|| - 1)^2 \leq 1$$

Найдите площадь этой фигуры и нарисуйте ее на плоскости (x, y)

Задание №4

Решите уравнение:

$$\cos^3 x + \cos^3 2x + \cos^3 3x = (\cos x + \cos 2x + \cos 3x)^3$$

Задание №5

Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению

$$f(x + 1) = f(x) + 2x + 1$$

Найдите $f(2001)$, если $f(0) = 0$

Задание №6

При повороте треугольника KLM на угол 120° вокруг точки A, лежащий на стороне KL, вершина M переходит в вершину K, а вершина L в точку P, лежащую на продолжении стороны LM за точку M.

Найдите отношение площадей треугольников KLM и LPA.

Задание №7

Найдите $\min 3y - 2x$ для тех (x, y) , которые удовлетворяют неравенству:

$$3y + 2x \geq x^2 + 5$$

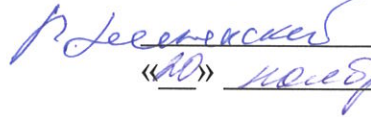
Задание №8

Найдите все целочисленные решения системы неравенств:

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - y + 18x - 26 > 0 \\ y^3 + x^2 - y - 8x + 14 < 0 \end{cases}$$

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю
«Математика»

 В.Н. Деснянский
«10» ноября 2024 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-11 класс
Вариант 3**

Задание №1

Найдите в явном виде целое число, заданное выражением:

$$\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$$

Задание №2

Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно с одного места и в одном направлении. Первый впервые обогнал второго через шесть минут, второй обогнал впервые третьего через четыре минуты.

Через сколько минут после старта первый впервые обогнал третьего?

Задание №3

Плоская фигура S представлена в виде множества точек (x, y) , удовлетворяющих неравенству:

$$(|x| + |2 - |y|| - 2)^2 \leq 4$$

Нарисуйте эту фигуру и найдите ее площадь.

Задание №4

Решите уравнение:

$$\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$$

Задание №5

Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) + (1 - x)f(0) + f(-1) = x^3 - 3$$

Задание №6

Точка О расположена на стороне АС треугольника АВС так, что $CO:CA=2:3$. При повороте этого треугольника на некоторый угол вокруг точки О вершина В переходит в вершину С, а вершина А в точку D, лежащую на стороне АВ.

Найдите отношение площадей треугольников BOD и ABC.

Задание №7

Найдите $\min 4y-3x$ где (x,y) удовлетворяют неравенству:
 $4y - x \geq 4x^2 + 1$

Задание №8

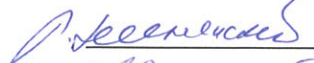
Найдите все целочисленные решения системы неравенств:

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0 \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0 \end{cases}$$

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю

«Математика»

 В.Н. Деснянский
«10» ноября 2024 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-11 класс
Вариант 4

Задание №1

Найдите в явном виде целое число, заданное выражением:

$$\sqrt{|17 - 12\sqrt{2}|} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7}$$

Задание №2

Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно с одного места и в одном направлении. Первый впервые обогнал второго через девять минут, второй обогнал впервые третьего через шесть минут.

Через сколько минут после старта первый впервые обогнал третьего?

Задание №3

Плоская фигура S представлена в виде множества точек (x, y) , удовлетворяющих неравенству:

$$(|y| + |1 - |x|| - 1)^2 \leq 9$$

Нарисуйте эту фигуру и найдите ее площадь.

Задание №4

Решите уравнение:

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^3 2x + \operatorname{tg}^3 3x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x)^3$$

Задание №5

Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению:

$$f(x + 1) = f(x) + 2x + 3$$

Найдите $f(2001)$, если $f(0) = 1$

Задание №6

При повороте треугольника EFG на угол $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$, вокруг точки O, лежащей на стороне EG, вершина F переходит в вершину E, а вершина G в точку H, лежащую на стороне FG.

Найдите отношение, в котором точка O делит сторону EG.

Задание №7

Найдите минимум выражения $3y - 2x$, где x, y удовлетворяют неравенству:

$$3y \geq x^2 + 6$$

Задание №8

Найдите все целочисленные решения системы неравенств:

$$\begin{cases} x^3 - 3y^2 - x + 18y - 26 > 0 \\ x^3 + y^2 - x - 8y + 14 < 0 \end{cases}$$

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД

Краткие решения к заданиям заключительного этапа
9-11 класс
Вариант 1

Задание №1

Так как $12\sqrt{5} > 12 \cdot 2,25 = 27$, то $|12\sqrt{5} - 29| = 29 - 12\sqrt{5}$.

Обозначим исходное выражение через x . Очевидно $x < 0$. Возводя x в квадрат, получим

$$x^2 = 29 - 12\sqrt{5} + 12\sqrt{5} + 29 - 2\sqrt{29^2 - (12\sqrt{5})^2} = 58 - 2\sqrt{841 - 720} = 58 - 2 \cdot 11 = 36$$

Так как $x < 0$, то $x = -6$.

Ответ: $\{-6\}$

Задание №2

Пусть скорости бегунов v_1, v_2, v_3 (кругов в минуту). Тогда по условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \frac{1}{5} \\ v_2 - v_3 = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Отсюда: $v_1 - v_3 = v_1 - v_2 + v_2 - v_3 = \frac{12}{35}$ мин. А тогда

искомая величина $\frac{v_1}{v_1 - v_3} = \frac{35}{12}$

Ответ: $\left\{\frac{35}{12} \text{ мин}\right\}$

Задание №3

Так как фигура симметрична относительно x и y , то достаточно нарисовать ее и вычислить площадь в первом квадранте т.е. при $x \geq 0, y \geq 0$. В этом случае получаем:

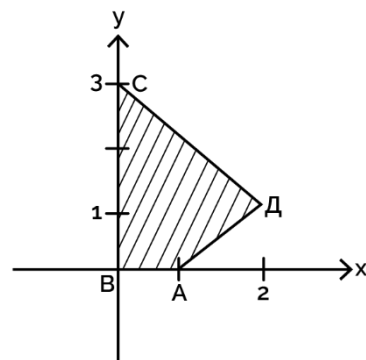
$$(x + |y - 1| - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x + |y - 1| \leq 2$$

Указанная область имеет вид ABCD (площадь треугольника плюс площадь трапеции). Отсюда находим:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2}(1 + 2) = 3,5$$

А тогда площадь всей фигуры равна $4 \cdot 3,5 = 14$

Ответ: {14}



Задание №4

Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то ОДЗ $\sin 2x \neq 0, \sin 3x \neq 0$. Обозначим: $\operatorname{ctg} x = a, \operatorname{ctg} 2x = b, \operatorname{ctg} 3x = c$. Тогда в этих обозначениях имеем: $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$. Преобразуя, получаем:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)^3 + 3c(a + b)^2 + 3(a + b)c^2 + c^3$$

$$\text{Далее: } a^2b + ab^2 + a^2c + 2abc + b^2c + ac^2 + 3bc^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(a + c) = 0$$

$$\text{Поэтому } \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin 5x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \sin 4x = 0 \\ \sin 5x = 0 \end{matrix} \text{ или}$$

Так как $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$, то отсюда $\cos 2x = 0$ ($\sin 2x \neq 0$ по ОДЗ).

Значит $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Если $\sin 5x = 0$, то $x = \frac{\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 5s$

Ответ: $\left\{ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 5s, s = \pm 0, \pm 1, \dots \right\}$

Задание №5

Полагаем в равенстве $x = 2$. Получим:

$$f(2) + 3f(0) = 10$$

При $x = 1$ имеем:

$$f(1) - f(1) + 3f(0) = 3 \Rightarrow f(0) = 1.$$

При $x = 0$ имеем:

$$f(0) - 2f(1) + 3f(0) = 2 \Rightarrow f(1) = 1$$

А тогда:

$$f(x) + x - 2 + 3 = x^3 + 2$$

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

Ответ: $x^3 - x + 1$

Задание №6

Сделаем чертеж. Обозначим $DN=x$, тогда

$DM=2x$, $DL=x$,

а $\angle ADM = \angle NDL$ (угол поворота)/

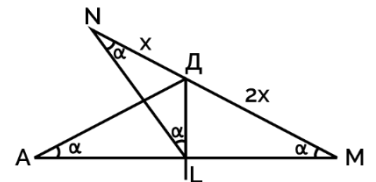
Тогда в равнобедренных $\triangle NDL$ и $\triangle ADM$ имеем равенство углов

$$\angle M = \angle A = \angle DLN = \angle N = \alpha$$

Поэтому $\triangle NLM$ также равнобедренный.

Из подобия $\triangle NDL \sim \triangle ADM$ с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и равенства $NL=LM$ имеем $AM=2NL=2LM$. Поэтому DL – медиана и высота в $\triangle ADM$. Поскольку $\angle LDM=2\alpha$ как внешний угол $\triangle LDN$, то из прямоугольного $\triangle LDM$ имеем $3\alpha=90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

Ответ: $\{30^\circ, 30^\circ, 120^\circ\}$



Задание №7

Обозначим $z = 2y - x$, откуда $2y = z + x$. Подставляя в неравенство получим, $z + x - 5x \geq 4x^2 + 5$; $4x^2 + 4x + 5 - z \leq$

$$0, x^2 + x + \frac{5-z}{4} \leq 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-5+z}}{2}, x = \frac{-1 \pm \sqrt{z-4}}{2}. \text{ Тогда } z \geq 4.$$

Следовательно $\min z = 4$

Ответ: $\{4\}$

Задание №8

Приведем систему к виду:

$$\begin{cases} x^3 - 4x > 3y^2 - 18y + 26 \\ x^3 - 4x < -y^2 + 8y - 14 \end{cases}$$

Отсюда по свойству транзитивности следует, что

$$3y^2 - 18y + 26 < -y^2 + 8y - 14$$

$$\text{т.е. } 4y^2 - 26y + 40 < 0, 2y^2 - 13y + 20 < 0,$$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4}, \frac{5}{2} < y < 4$$

Так как y – целое, то $y=3$. Подставляя $y=3$ в исходную систему,

получим:

$$\begin{cases} x^3 - 4x > -1 \\ x^3 - 4x < 1 \end{cases}$$

но тогда в силу целостности

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x \pm 2, 0$$

Ответ: $(x, y) \in \{(-2, 3), (2, 3), (0, 3)\}$

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД

Краткие решения к заданиям заключительного этапа

9-11 класс

Вариант 2

Задание №1

Пусть $a = \sqrt{1,5} + \sqrt{7,5}$. Тогда

$$a^2 = 1,5 + 7,5 + 2\sqrt{1,5 \cdot 7,5} = 9 + 2 \cdot 1,5\sqrt{5} = 9 + 3\sqrt{5} = 9 + \sqrt{45}.$$

Поэтому:

$$\sqrt{9 + \sqrt{45}} - \sqrt{1,5} - \sqrt{7,5} = 0.$$

Следовательно, данное выражение равно 1

Ответ: {1}

Задание №2

Пусть скорости бегунов v_1, v_2, v_3 (кругов в минуту). Тогда по условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \frac{1}{3} \\ v_1 - v_3 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Отсюда: $v_2 - v_3 = \frac{4}{15}$. А тогда искомая величина равна

$$\frac{1}{4/15} = \frac{15}{4}$$

Ответ: $\frac{15}{4}$ мин

Задание №3

Так как фигура симметрична относительно x и y , то достаточно нарисовать ее и вычислить площадь в первом квадранте т.е. при $x \geq 0, y \geq 0$. В этом случае получаем:

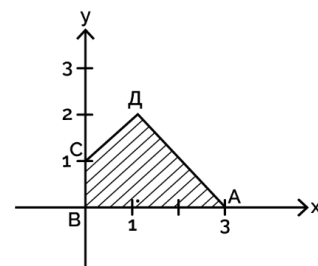
$$(y + |x - 1| - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y - 1 + |x - 1| \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 2 - |x - 1|$$

Нарисовав эту область на плоскости, получим ABCD

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} (1 + 2) = 3,5$$

А тогда площадь всей фигуры равна $4 \cdot 3,5 = 14$



Ответ: {14}

Задание №4

Обозначим $a = \cos x$ $b = \cos 2x$, $c = \cos 3x$

Получим:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b)^2c.$$

Преобразуя, это равенство, получим:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)[(a + b)^2 + 3c(a + b) + 3c^2]$$

Отсюда:

$$(a + b)(b + c)(a + c) = 0$$

Поэтому

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x + \cos 2x = 0 \\ \cos 2x + \cos 3x = 0 \\ \cos x + \cos 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \cos \frac{3x}{2} = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos \frac{5x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n \\ x = \frac{\pi + 2\pi m}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi s}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi l}{5} \end{cases}$$

$n, m, k, l \in Z$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi + 2\pi n, \frac{\pi + 2\pi m}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi s}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi l}{5} \right\}$$

Задание №5

Подставляя $x = 0, 1, 2 \dots 2001$ в равенство $f(x + 1) = f(x) + 2x + 1$

С учетом $f(0) = 0$,

Получаем:

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = f(1) + 2 \cdot 1 + 1$$

$$f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 + 1$$

.....

$$f(2000) = f(1999) + 2 \cdot 1999 + 1$$

$$f(2001) = f(2000) + 2 \cdot 2000 + 1$$

Складывая эти равенства получаем:

$$f(2001) = 2(1 + 2 + \dots + 1999 + 2000) + 1 \cdot 2001 = (1 + 2000) \cdot 2000 + 2001 = 2001^2$$

Ответ: 2001^2

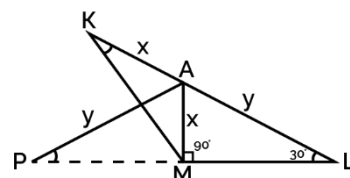
Задание №6

Сделаем рисунок. По условиям задачи

$$AP = AL, AM = AK, \angle KAM = \angle PAL = 120^\circ$$

Нужно найти:

$$\frac{S \triangle KLM}{S \triangle PAL}$$



Решение:

Имеем: $\angle K = \angle L = \angle M = 30^\circ$ Обозначим $KA = x, AL = y$. Так как

$\triangle KLM$ подобен $\triangle PAL$, то отношение площадей этих треугольников равно квадрату отношения сходственных сторон. По теореме косинусов находим, что $PL^2 = 3y^2$. Далее $x = \frac{y}{2}$, значит $KL = \frac{3y}{2}$.

Поэтому искомое отношение будет равно:

$$\frac{\frac{9y^2}{4}}{3y^2} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\{3: 4\}$

Задание №7

Обозначим $3y - 2x = z$. Нужно найти $\min z$ при условии, что $3y + 2x \geq x^2 + 5$. Подставляя в неравенство получим,

$$z + 2x + 2x \geq x^2 + 5; \quad x^2 - 4x + 5 - z \leq 0.$$

Отсюда, решая это кв. неравенство, получим

$$x = 2 \pm \sqrt{4 + z - 5} = 2 \pm \sqrt{z - 1}.$$

Поэтому $\min z = 1$. Это возможно, если $x = 2, y = \frac{5}{3}$

Ответ: $\{1\}$

Задание №8

Приведем систему к виду:

$$\begin{cases} y^3 - y > 3x^2 - 18x + 26 \\ y^3 - y < -x^2 + 8x - 14 \end{cases}$$

По свойству транзитивности, отсюда следует, что

$$3x^2 - 18x + 26 < -x^2 + 8x - 14$$

тогда имеем:

$$4x^2 - 26x + 40 < 0, \text{ т. е. } 2x^2 - 13x + 20 < 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 4$$

Тогда:

$$\frac{5}{2} < x < 4$$

Так как x целое число, то находим, что $x = 3$. Подставляя $x = 3$

в исходную систему, получим:

$$\begin{cases} y^3 - y > -1 \\ y^3 - y < 1 \end{cases} \quad -1 < y^3 - y < 1$$

По условию целочисленное, поэтому:

$$y^3 - y = 0 \quad y(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0, \quad y = 1, \quad y = -1$$

Ответ: $(x, y) \in \{(3, 0), (3, -1), (3, 1)\}$

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД

Краткие решения к заданиям заключительного этапа

9-11 класс

Вариант 3

Задание №1

Так как $\sqrt{2} < 1,42$, то

$$40 \cdot 1,42 = 56,8 < 57$$

Поэтому:

$$|40\sqrt{2} - 57| = 57 - 40\sqrt{2}$$

Обозначим:

$$\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 + 40\sqrt{2}} = \alpha$$

$\alpha < 0$. Тогда

$$\alpha^2 = 57 - 40\sqrt{2} + 57 + 40\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{57^2 - 3200} = 114 - 14 = 100$$

Но $\alpha < 0$, поэтому

Ответ: $\{-10\}$

Задание №2

Пусть скорости бегунов v_1, v_2, v_3 (кругов в минуту). Тогда по условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \frac{1}{6} \\ v_2 - v_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Отсюда: } v_1 - v_2 + v_2 - v_3 = v_1 - v_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

А тогда

$$\frac{1}{v_1 - v_3} = \frac{12}{5}$$

Ответ: $\frac{12}{5}$ мин

Задание №3

Так как фигура симметрична относительно x и y , то достаточно нарисовать ее и вычислить площадь в первом квадрате т.е. при $x \geq 0, y \geq 0$.

Имеем:

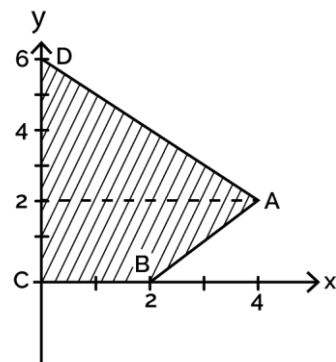
$$| |x| + |2 - |y|| - 2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq |x| + |2 - |y|| - 2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq |x| + |2 - |y|| \leq 4$$

Поэтому при $x \geq 0, y \geq 0$ получаем:

$$0 \leq x + |y - 2| \leq 4 = \begin{cases} \text{для } 0 \leq y \leq 2 & y \geq x - 2 \\ \text{для } y > 2 & y \leq 6 - x \end{cases}$$

Нарисовав на плоскости в I четверти получим область, состоящую из прямоугольного треугольника и трапеции. Тогда площадь этой области равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2(4 + 2) = 8 + 6 = 14$$



Ответ: {56}

Задание №4

Обозначим $\sin x = a$ $\sin 2x = b$ $\sin 3x = c$.

Тогда:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = (a + b + c)^3 - c^3 \Leftrightarrow (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = ((a + b + c)^2 + (a + b + c)c + c^2)(a + b)$$

Отсюда получим:

$$(a + b)(a + c)(b + c) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x + \sin 2x = 0 \\ \sin 2x + \sin 3x = 0 \\ \sin x + \sin 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x(1 + 2\cos x) = 0 \\ \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \sin 2x \cos x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \cos x = 0 \\ \sin \frac{5x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m \\ x = \frac{2\pi n}{5} \\ x = \pi + 2\pi e \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{k\pi}{2}, \frac{2\pi n}{5}, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, \pi + 2\pi l, k, n, m, l \in \mathbb{Z} \right\}$ Задание №5

Полагаем $x = 1$. Получаем:

$$f(-1) + 2f(0) + f(1) = -4$$

$$f(-1) + f(0) = -2$$

Полагая $x = 0$, получим:

$$f(0) + f(0) + f(-1) = -3 \Rightarrow 2f(0) + f(-1) = -3$$

Решаем совместно систему:

$$\begin{cases} f(-1) + f(0) = -2 \\ 2f(0) + f(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(0) = -1, f(-1) = -1$$

Ответ: $x^3 - x - 1$

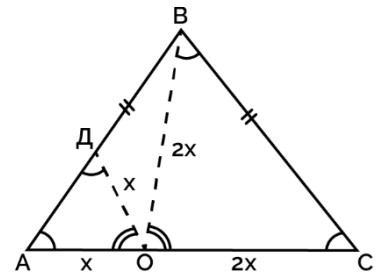
Задание №6

Сделаем чертеж.

Решение

Пусть $AO = x$, тогда по условию задачи $OC = 2x = OB$.

Тогда $\angle COB = \angle AOD$ – как углы поворота вокруг точки O . Поэтому равнобедренные треугольники $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что $\triangle ABC$ равнобедренный и $AB = BC = 2AD = 2BD$. Отсюда $S_{BOD} = \frac{1}{2} S_{AOB}$, поскольку эти треугольники имеют общую высоту из точки O . Аналогично:



$$\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{3}$$

Поэтому:

$$\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle AOB}} \cdot \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

Ответ: $\{1: 6\}$

Задание №7

Пусть $z = 4y - 3x$. Нужно найти $\min z$. Имеем при условии, что $4y = z + 3x$ подставляя в неравенство имеем:

$$z + 3x \geq 4x^2 + 1, \quad 4x^2 - 3x + 1 - z \leq 0$$

Решаем это неравенство.

Имеем:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16 + 16z}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{16z - 7}}{8}.$$

Следовательно $\min z = \frac{7}{16}$. Условие будет выполнено, если

$$x = \frac{3}{8}$$

Ответ: $\left\{\frac{7}{16}\right\}$

Задание №8

Обозначим $y^3 - 4y = a$ получаем систему:

$$\begin{cases} a > 3x^2 - 18x + 26 \\ a < -x^2 + 8x - 14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3x^2 - 18x + 26 < -x^2 + 8x - 14 \Rightarrow 4x^2 - 26x + 40 < 0 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 20 < 0$$

Решая это неравенство, находим, что $\frac{5}{2} < x < 4$. Так как x – целое число, то $x = 3$. А тогда:

$$\begin{cases} y^3 - 4y > -1 \\ y^3 - 4y < 1 \end{cases}$$

Так как y – целое число, то $-1 < y^3 - 4y < 1$.

Тогда: $y^3 - 4y = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = -2$, $y_3 = 2$

Ответ: $\{(3,0), (3,-2), (3,2)\}$

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД

Краткие решения к заданиям заключительного этапа

9-11 класс

Вариант 4

Задание №1

Имеем $(\sqrt{2} + 1)^3 = 2\sqrt{2} + 3 \cdot 2 + 3 \cdot \sqrt{2} + 1 = 5\sqrt{2} + 7$. Далее

$$(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow (3 - 2\sqrt{2})^2 = 9 + 8 - 12\sqrt{2} = 17 - 12\sqrt{2}$$

Поэтому имеем:

$$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$$

Ответ: {1}

Задание №2

Пусть скорости бегунов v_1, v_2, v_3 (кругов в минуту). Тогда по условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \frac{1}{9} \\ v_2 - v_3 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{Отсюда: } v_1 - v_2 + v_2 - v_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}.$$

А тогда

$$\frac{1}{v_1 - v_3} = \frac{18}{5} = 3,6$$

Ответ: 3,6 мин

Задание №3

Фигура симметрична относительно Ox и Oy . Поэтому достаточно нарисовать часть ее фигуры в первой четверти и найти ее площадь. Для $x \geq 0, y \geq 0$.

Имеем:

$$\begin{aligned}(y + |1 - x| - 1)^2 &\leq 9 \Rightarrow \\ |y + |1 - x| - 1| &\leq 3 \Rightarrow \\ -3 &\leq y - 1 + |1 - x| \leq 3 \Rightarrow \\ -2 &\leq y + |1 - x| \leq 4\end{aligned}$$

При $x \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned}-2 &\leq y + |x - 1| \leq 4 \Rightarrow \\ -1 &\leq y + x \leq 5\end{aligned}$$

при $x < 1$ получаем:

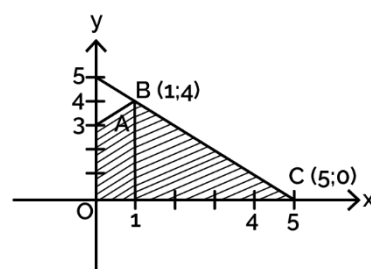
$$-2 \leq y + 1 - x \leq 4 \Rightarrow -3 \leq y - x \leq 3$$

Нарисовав соответствующие области, получим фигуру $OABC$. Она состоит из трапеции и прямоугольного треугольника. Их площади равны:

$$\frac{1}{2} \cdot 1(4 + 3) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 11,5$$

Тогда площадь всей фигуры равна 46

Ответ: {46}



Задание №4

Пусть $\operatorname{tg} x = a$ $\operatorname{tg} 2x = b$ $\operatorname{tg} 3x = c$.

Тогда:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = (a + b + c)^3 - c^3 \Leftrightarrow (a + b)$$

$$((a + b + c)^2 - c(a + b + c) + c^2) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Далее преобразовав, получим:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0 \\ \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0 \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin 5x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \text{ по ОДЗ}$$

$$\cos 3x \neq 0, \quad \cos 2x \neq 0, \quad \cos x \neq 0$$

Так как $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 4\sin x \cos x \cos 2x$, то подходит лишь $\sin x = 0$ и так как $\sin x = 0$ есть подмножество решений $\sin 3x = 0$, то

Ответ: $\left\{ \frac{m\pi}{3}, \frac{\pi n}{5}, n, m \in \mathbb{Z} \right\}$

Задание №5

Полагаем в уравнении $x = 0$.

Тогда:

$$f(1) = f(0) + 3 = 4$$

$$f(2) = f(1) + 2 \cdot 1 + 3$$

$$f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 + 3$$

$$f(4) = f(3) + 2 \cdot 3 + 3$$

.....

$$f(2000) = f(1999) + 2(1999) + 3$$

$$f(2001) = f(2000) + 2 \cdot 2000 + 3$$

Складывая левые части и правые части этих соотношений, мы получим:

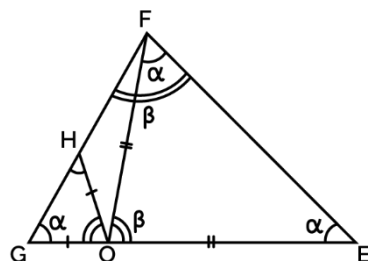
$$\begin{aligned} f(2001) &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + 2000) + 3 \cdot 2000 + 4 = 2 \cdot \frac{1 + 2000}{2} \cdot 2000 + 3 \cdot 2000 + 4 = \\ &= 2001 \cdot 2000 + 3 \cdot 2000 + 4 = 2000 \cdot 2004 + 4 = 4008004 \end{aligned}$$

Ответ: 4008004

Задание №6

По условию задачи $OH=OG$, $OF=OE$
 $\angle GON = \angle FOE = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

В равнобедренных $\triangle HOG$ и $\triangle EOF$ углы обозначим $\angle G = \angle OHG = \angle OFE = \alpha$; угол поворота обозначим β . Тогда из треугольника OFE следует,



что

$\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \angle E$. Поэтому из $\triangle FEO$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{FE}{\sin \beta} = \frac{EO}{\sin \alpha}; \quad \frac{FE}{\sin \beta} = \frac{FE}{\sin(90 - \frac{\beta}{2})} = \frac{EO}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

Отсюда получаем, что $FE = 2EO \sin \frac{\beta}{2}$. Из треугольника FEQ имеем $EG = 2FE \sin \frac{\beta}{2} = 4EO \sin^2 \frac{\beta}{2} = 2EO(1 - \cos \beta) = \frac{4}{3}EO$

А тогда

$$\frac{EO}{OG} = \frac{EO}{EG-EO} = 3:1$$

Ответ: {3: 1}

Задание №7

Обозначим $3y - 2x = z$, поэтому $3y = 2x + z$. Поэтому

$$2x + z \geq x^2 + 6 \Rightarrow x^2 - 2x + 6 - z \leq 0$$

Из этого следует,

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 6 + z} = 1 \pm \sqrt{z - 5}$$

Значит:

$$z \geq 5 \Rightarrow \min z = 5$$

Это значение z достигается, если

$$x = 1, y = \frac{7}{3}$$

Ответ: {5}

Задание №8

Имеем:

$$\begin{cases} x^3 - x > 3y^2 - 18y + 26 \\ x^3 - x < -y^2 + 8y - 14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3y^2 - 18y + 26 < -y^2 + 8y - 14 \Rightarrow 4y^2 - 26y + 40 < 0 \Rightarrow 2y^2 - 13y + 20 < 0$$

Из этого следует, что

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{4} = \left(\frac{5}{2}, 4\right)$$

Поэтому:

$$2,5 < y < 4$$

но y - целое число, поэтому $y = 3$. Подставляя в систему $y = 3$,

Получаем:

$$\begin{cases} x^3 - x > 27 - 54 + 26 = -1 \\ x^3 - x < -9 + 24 - 14 = 1 \end{cases}$$

Следовательно,

$$-1 < x^3 - x < 1$$

Но тогда это возможно лишь при

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$$

Ответ: {(0,3), (-1,3), (1,3)}

